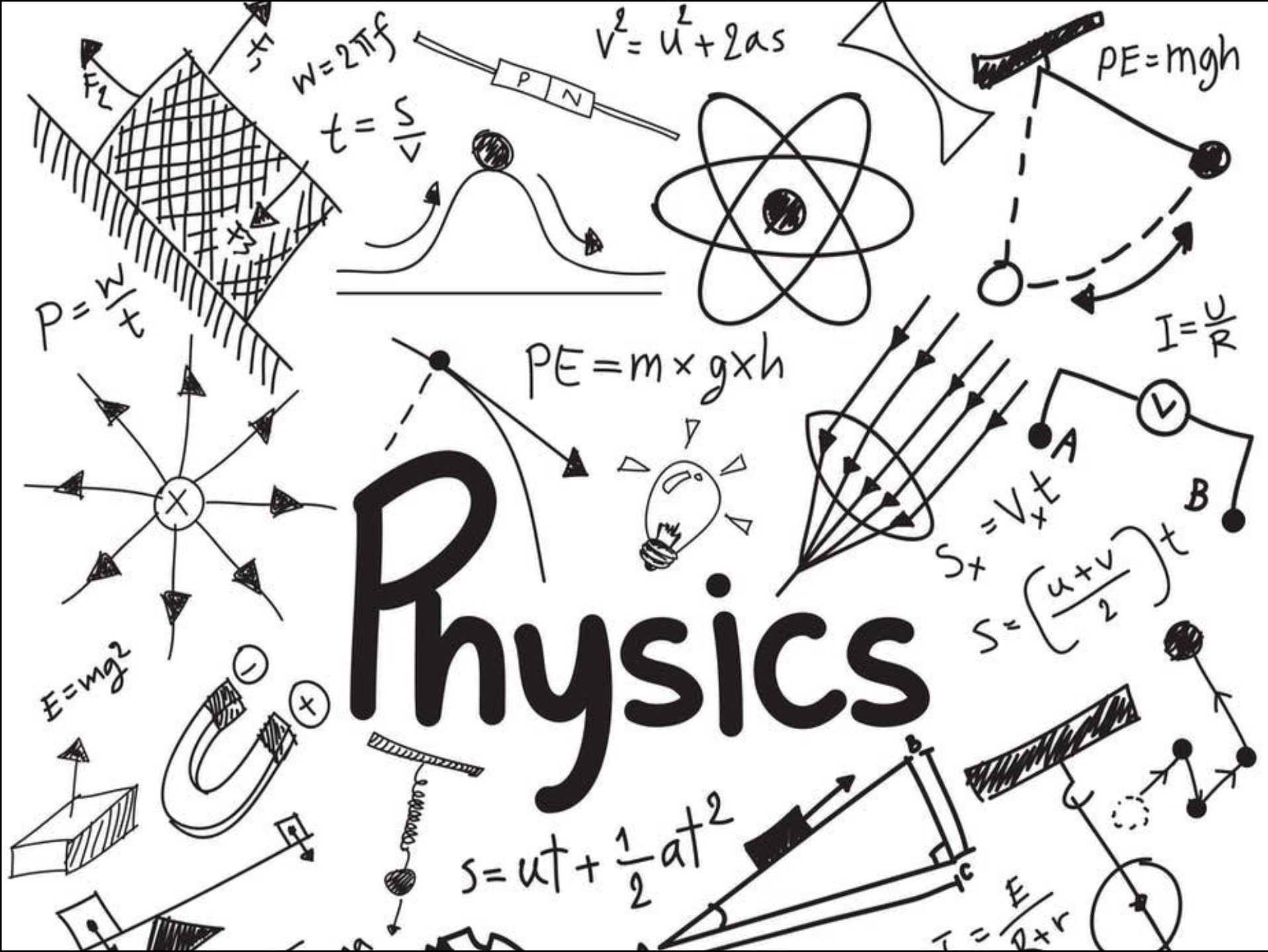


Physics



Reminder...

- ◉ Διαλέξεις
 - ◉ Προαιρετική παρουσία!
- ◉ Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
- ◉ Δεν υπάρχουν απουσίες
- ◉ Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- ◉ Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Στάσιμα Κύματα



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα

Στάσιμα Κύματα

$$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta \pm \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta \mp \varphi}{2} \right)$$

• Στάσιμα κύματα

- Ως τώρα βλέπαμε ηχητικά κύματα που συνέβαλαν σε κάποιο σημείο μπροστά τους

- Τι θα γίνει αν τα βάλουμε αντικρουστά;

- Ίδια συχνότητα, μήκος κύματος, πλάτος
- Αντίθετη ταχύτητα

- $y = y_1 + y_2$
 $= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$
 $= (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$

- Η παραπάνω σχέση ορίζει ένα **στάσιμο κύμα**

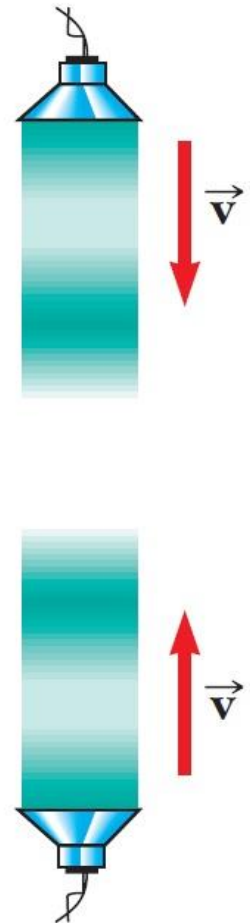


Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Παρατηρήστε ότι **δεν** εξαρτάται από την έκφραση $kx \pm \omega t$
 - Άρα **δεν** είναι οδεύον κύμα
- Δεν υπάρχει η έννοια της διάδοσης της κίνησης σε ένα στάσιμο κύμα
- Γενικότερα, **στάσιμη** λέγεται μια ταλάντωση με στάσιμο περίγραμμα που αποτελείται από την υπέρθεση δυο όμοιων κυμάτων που ταξιδεύουν προς αντίθετες κατευθύνσεις



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

- Ας συγκρίνουμε:

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

και

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

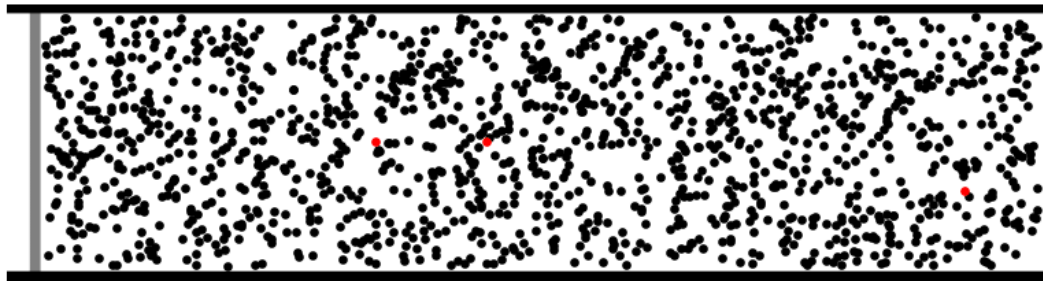
- Τι παρατηρείτε;

- Η δεύτερη περιγράφει μια ειδική μορφή της πρώτης

- $\varphi = 0$ στην κυματοσυνάρτηση
 - Κάθε στοιχείο που βρίσκεται στη **θέση** x εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση
 - Το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης, $2A \sin(kx)$, ενός στοιχείου εξαρτάται από τη **θέση** του στοιχείου, x , στο μέσο

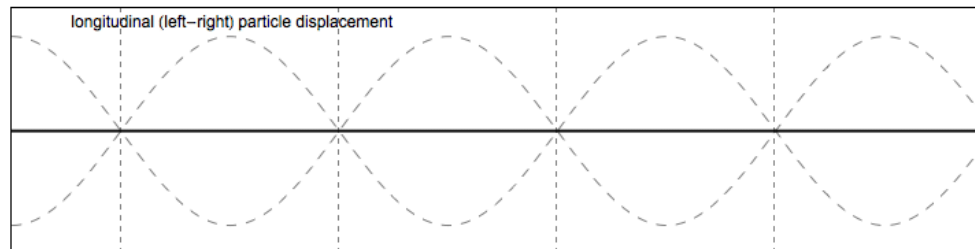
Στάσιμα Κύματα

ο Στάσιμα κύματα

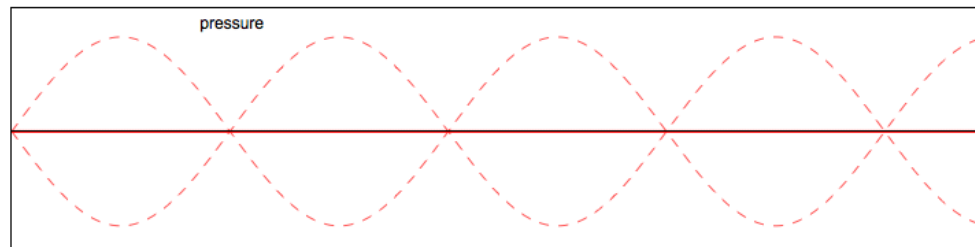


©2012, Dan Russell

Μετατόπιση

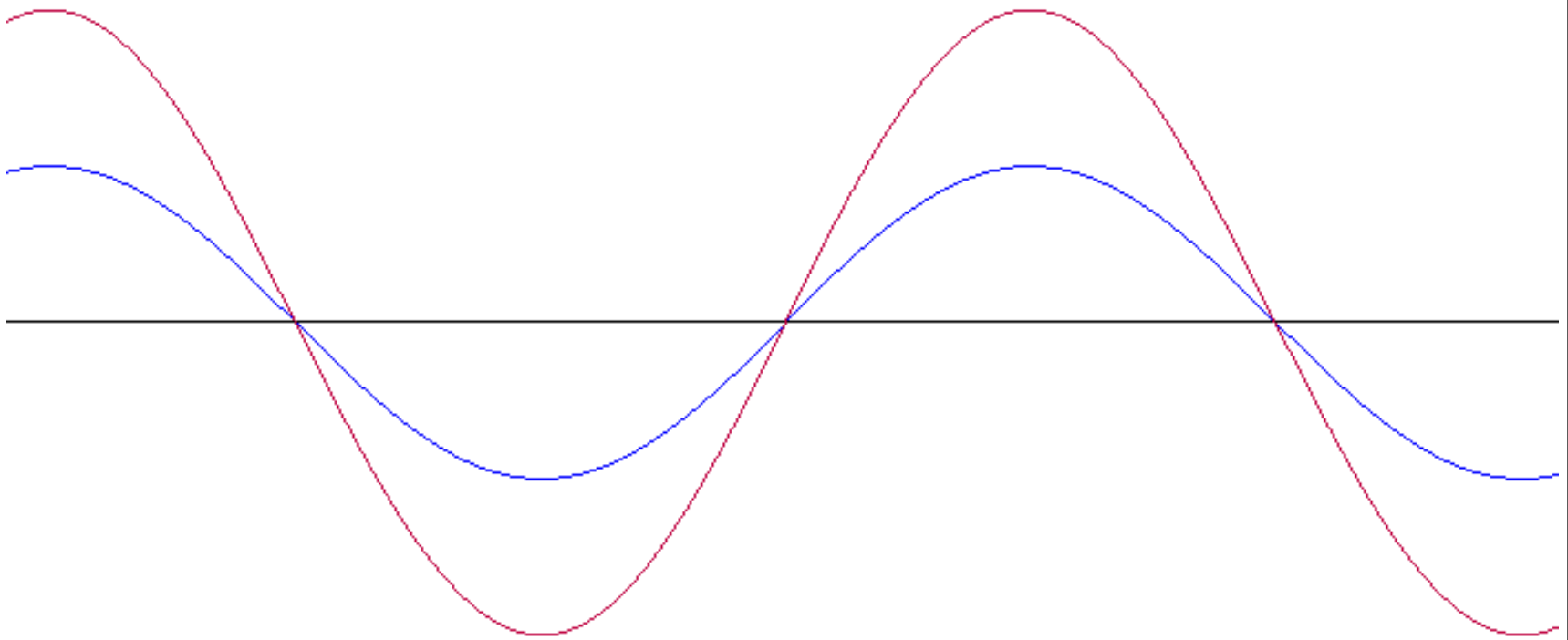


Πίεση



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα



Στάσιμα Κύματα

ο Στάσιμα κύματα

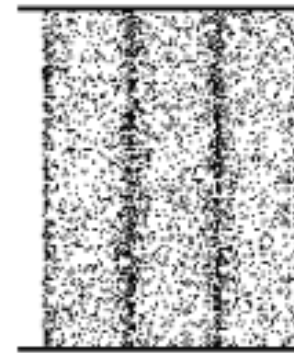
Creating Standing Waves from Travelling Waves



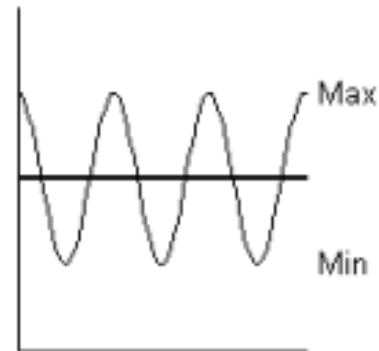
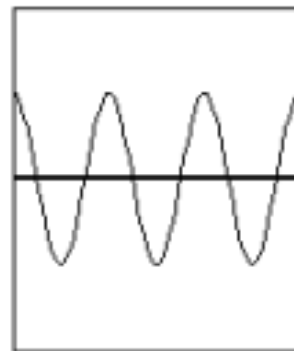
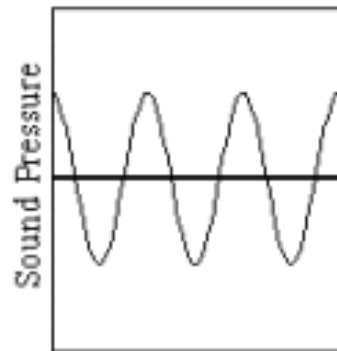
plane wave: →



plane wave: ←



plane waves: superposition



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Πότε μηδενίζεται το πλάτος; (δηλ. υπάρχουν στοιχεία του μέσου που ΔΕΝ ταλαντώνονται?)

$$kx = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **δεσμοί (nodes)**

- Πότε μεγιστοποιείται το πλάτος; (δηλ. υπάρχουν στοιχεία του μέσου που ταλαντώνονται με το μέγιστο δυνατό πλάτος?)

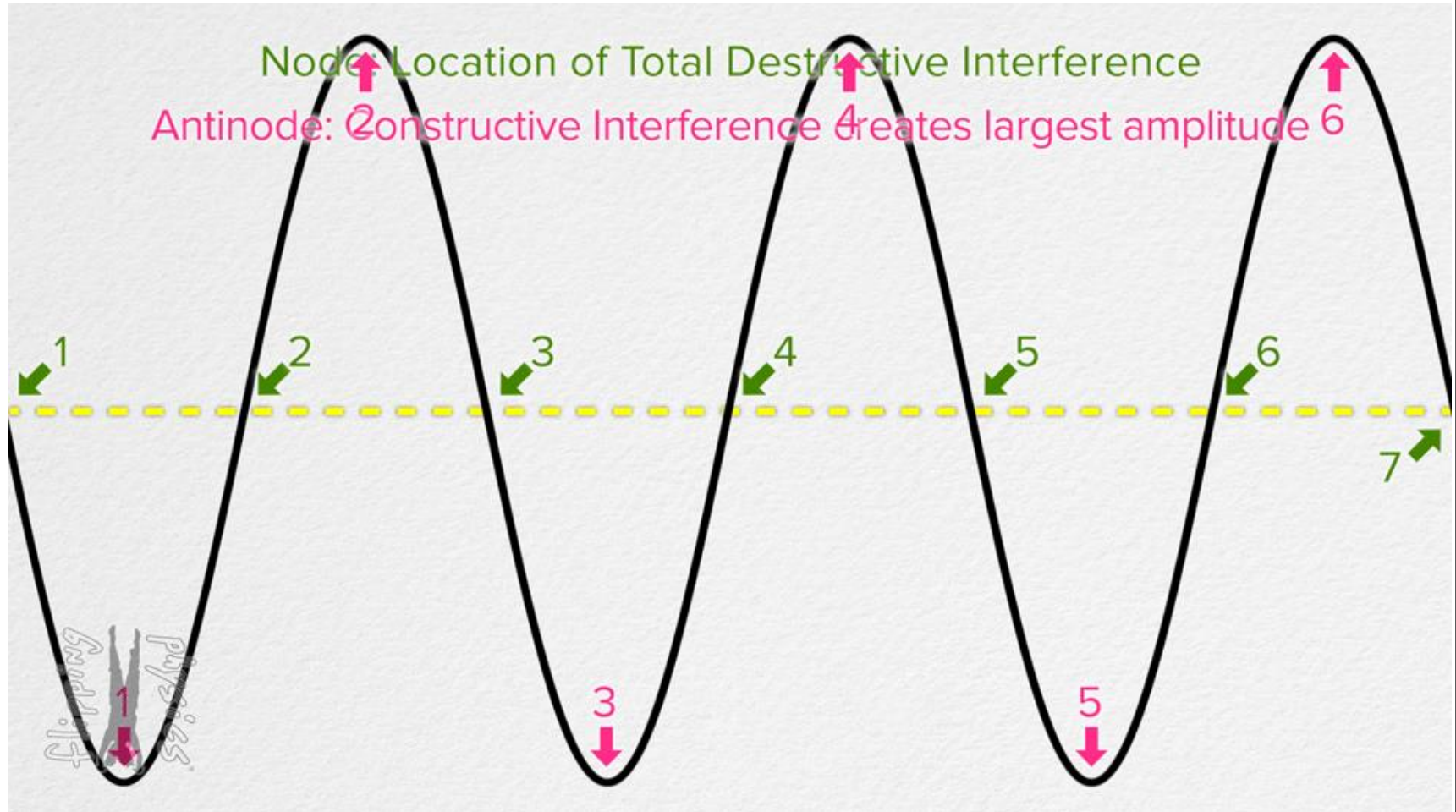
$$kx = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2n + 1)\lambda}{4},$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **κοιλίες (ή αντιδεσμοί) (antinodes)**

Στάσιμα Κύματα

• Στάσιμα κύματα



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

- Άρα εύκολα συμπεραίνει κανείς από τα προηγούμενα:

- Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κοιλιών $= \frac{\lambda}{2}$

- Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών $= \frac{\lambda}{2}$

- Απόσταση μεταξύ δεσμού και επόμενης κοιλίας $= \frac{\lambda}{4}$

Στάσιμα Κύματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Δυο κύματα τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, δημιουργούν ένα στάσιμο κύμα. Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1(x, t) = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2(x, t) = 4 \sin(3x + 2t)$$

με x, y να μετρώνται σε εκατοστά και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

- ◉ Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
- ◉ Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Στάσιμα Κύματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2 = 4 \sin(3x + 2t)$$

- ◉ Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
- ◉ Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

A) Το στάσιμο κύμα περιγράφεται από την κυματοσυναρτηση

$$y(x,t) = 2 \cdot 4 \cdot \sin(3x) \cdot \cos(2t)$$

$$= 8 \sin(3x) \cos(2t)$$

Για $x = 2.3 \text{ cm}$, το πλάτος θα είναι $A(2.3) = 8 \sin(3 \cdot 2.3) = 8 \sin(6.9)$

$\approx 4.6 \text{ cm}$, άρα το στοιχείο $x = 2.3 \text{ cm}$ εκτελεί Α.Α.Τ. με $A = 4.6 \text{ cm}$

και $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Στάσιμα Κύματα

$$y(x,t) = (8 \sin(3x)) \cos(2t)$$

• Παράδειγμα – Λύση:

- Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2 = 4 \sin(3x + 2t)$$

- Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
- Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Β)} \equiv \text{έραφε} \text{ } \epsilon\tau \quad x_a &= \frac{2n+1}{4} \lambda, \quad n \in \mathbb{N} \\ x_d &= \frac{n}{2} \lambda, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x_a &= \frac{2n+1}{4} \lambda, \quad n \in \mathbb{N} \\ x_d &= \frac{n}{2} \lambda, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

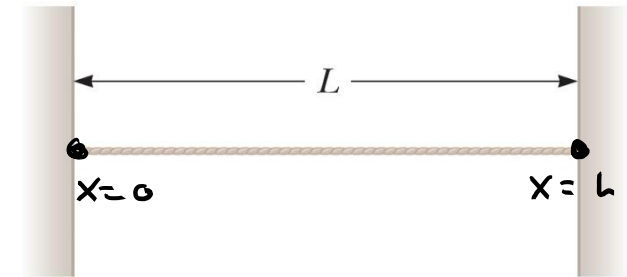
$$\text{Γ.ω} \quad k=3 \Leftrightarrow k = \frac{2n}{\lambda} = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{2n}{3} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow x_a = \frac{(2n+1)}{4} \cdot \frac{2n}{3}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_d = \frac{n}{2} \cdot \frac{2n}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Στάσιμα Κύματα

• Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

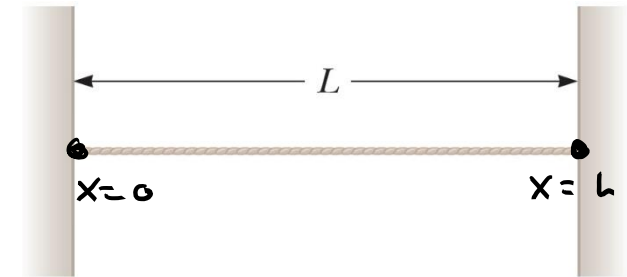
- Θεωρήστε το νήμα της εικόνας
 - Χορδή κιθάρας, πιάνου



- Οριακή συνθήκη: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα!
- Αν διεγείρουμε το νήμα στο μέσο του, δυο ημιτονοειδή κύματα θα ταξιδέψουν προς αντίθετες κατευθύνσεις
 - Όταν φτάσουν στα άκρα του νήματος, θα ανακλαστούν με ίδιο πλάτος και συχνότητα, και θα συμβάλλουν μεταξύ τους
 - Κι αυτό συνεχίζεται για τα επόμενα ανακλώμενα και συμβαλλόμενα κύματα
- Αυτές είναι οι συνθήκες για δημιουργία ενός στάσιμου κύματος!

Στάσιμα Κύματα

• Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες



- Οριακή συνθήκη: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα!
- Άρα το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν στάσιμο κύμα πάνω στο νήμα είναι προκαθορισμένο
- $2A \sin kL = 0 \Rightarrow kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$
- Προκαθορισμένη είναι και η συχνότητα του κύματος, αφού

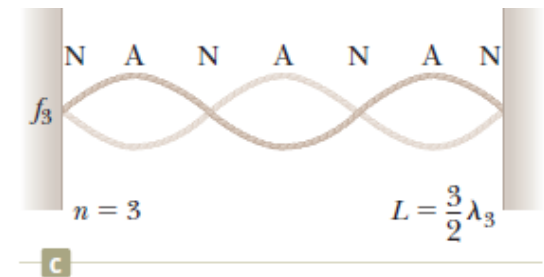
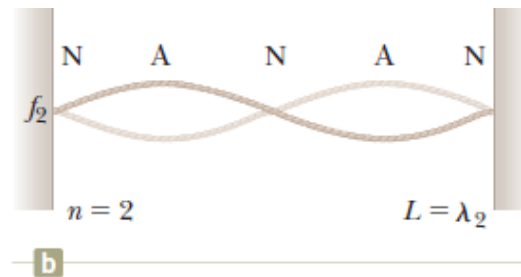
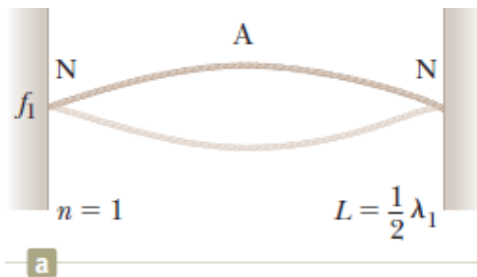
$$u = \lambda f \Rightarrow f_n = \frac{u}{\lambda_n}$$

- Η οριακή συνθήκη προκαλεί ένα συγκεκριμένο αριθμό διακριτών στάσιμων κυμάτων στο νήμα, που λέγονται **κανονικοί τρόποι ή ιδιομορφές (modes)**
- Καθεμιά έχει τη δική της συχνότητα, η οποία υπολογίζεται εύκολα όπως παραπάνω

Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**

- Κανονικός τρόπος (mode) n
- Περιγράφεται ως η ταλάντωση που έχει οριακές συνθήκες στα άκρα της (δεσμοί) και κάθε δεσμός απέχει $\frac{1}{4}$ του μήκους κύματος από τον επόμενο/προηγούμενο αντιδεσμό



- Μήκη κύματος

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in \mathbb{N}^+$$

- Φυσικές συχνότητες

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L} = n f_1, n \in \mathbb{N}^+$$

- Για νήμα τάσης T και γραμμικής πυκνότητας μ ,

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, n \in \mathbb{N}^+$$

Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

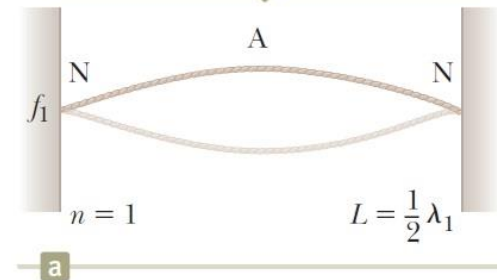
- Κανονικές μορφές (modes) n

- Για $n = 1$, η συχνότητα αυτή λέγεται **θεμελιώδης συχνότητα**

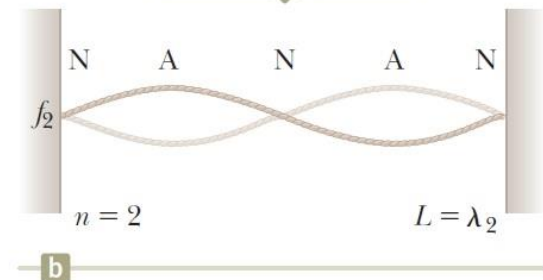
- Οι υπόλοιπες είναι ακέραιες πολλαπλάσιες αυτής: $f_n = n f_1$

- Συχνότητες κανονικών τρόπων που παρουσιάζουν αυτήν την ακέραια πολλαπλάσια σχέση δημιουργούν μια **αρμονική σειρά** και οι ταλαντώσεις αυτές λέγονται **αρμονικές**

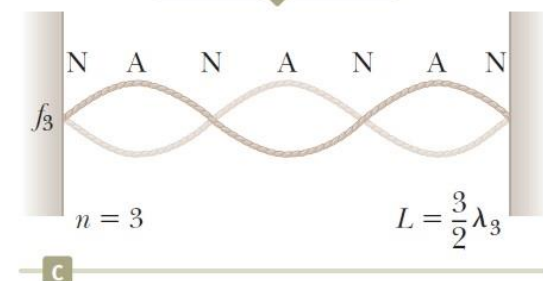
Πρώτη αρμονική (θεμελιώδης)



Δεύτερη αρμονική



Τρίτη αρμονική

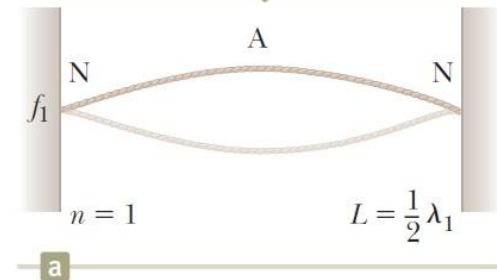


Στάσιμα Κύματα

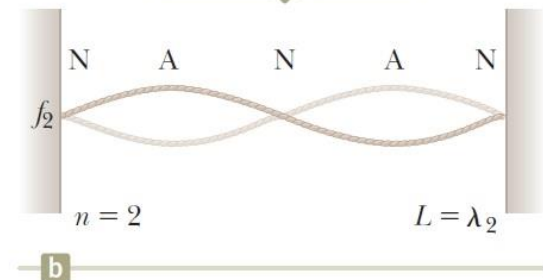
• Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Για να παρουσιαστεί μια μόνο αρμονική, πρέπει να διεγείρουμε το νήμα ώστε να πάρει το σχήμα της επιθυμητής αρμονικής
 - Αφού το διεγείρουμε, το νήμα θα ταλαντωθεί στην αντίστοιχη συχνότητα
 - Δύσκολο να επιτευχθεί για τις περισσότερες αρμονικές
- Αν διεγείρουμε το νήμα με τυχαίο τρόπο, μόνο κύματα που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες θα «επιζήσουν» στο νήμα
 - Αυτά είναι οι αρμονικές 😊

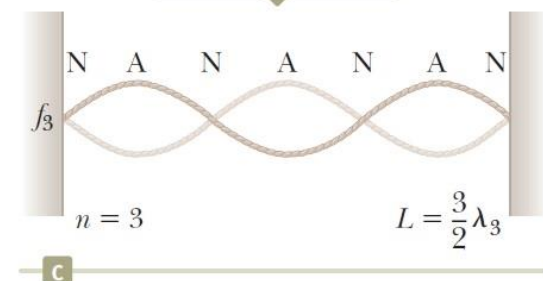
Πρώτη αρμονική (θεμελιώδης)



Δεύτερη αρμονική

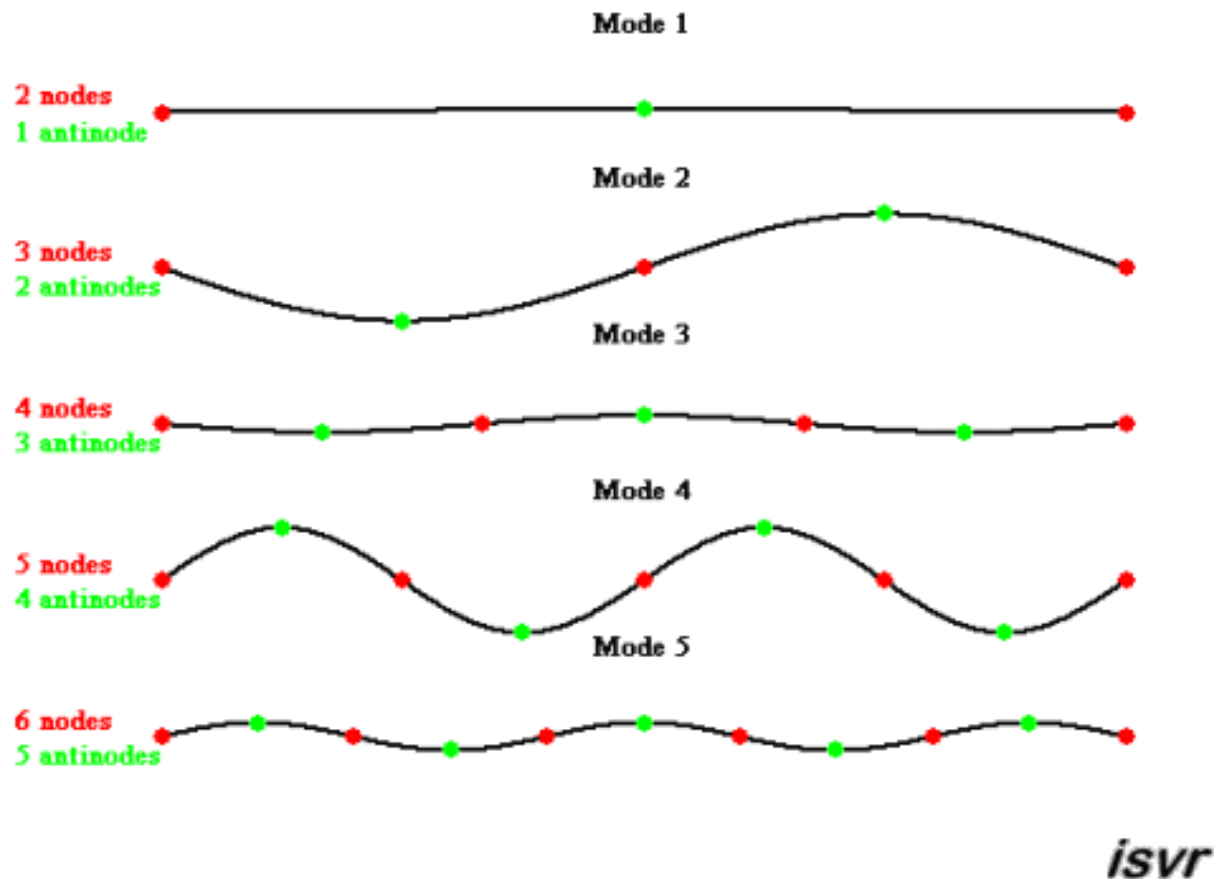


Τρίτη αρμονική



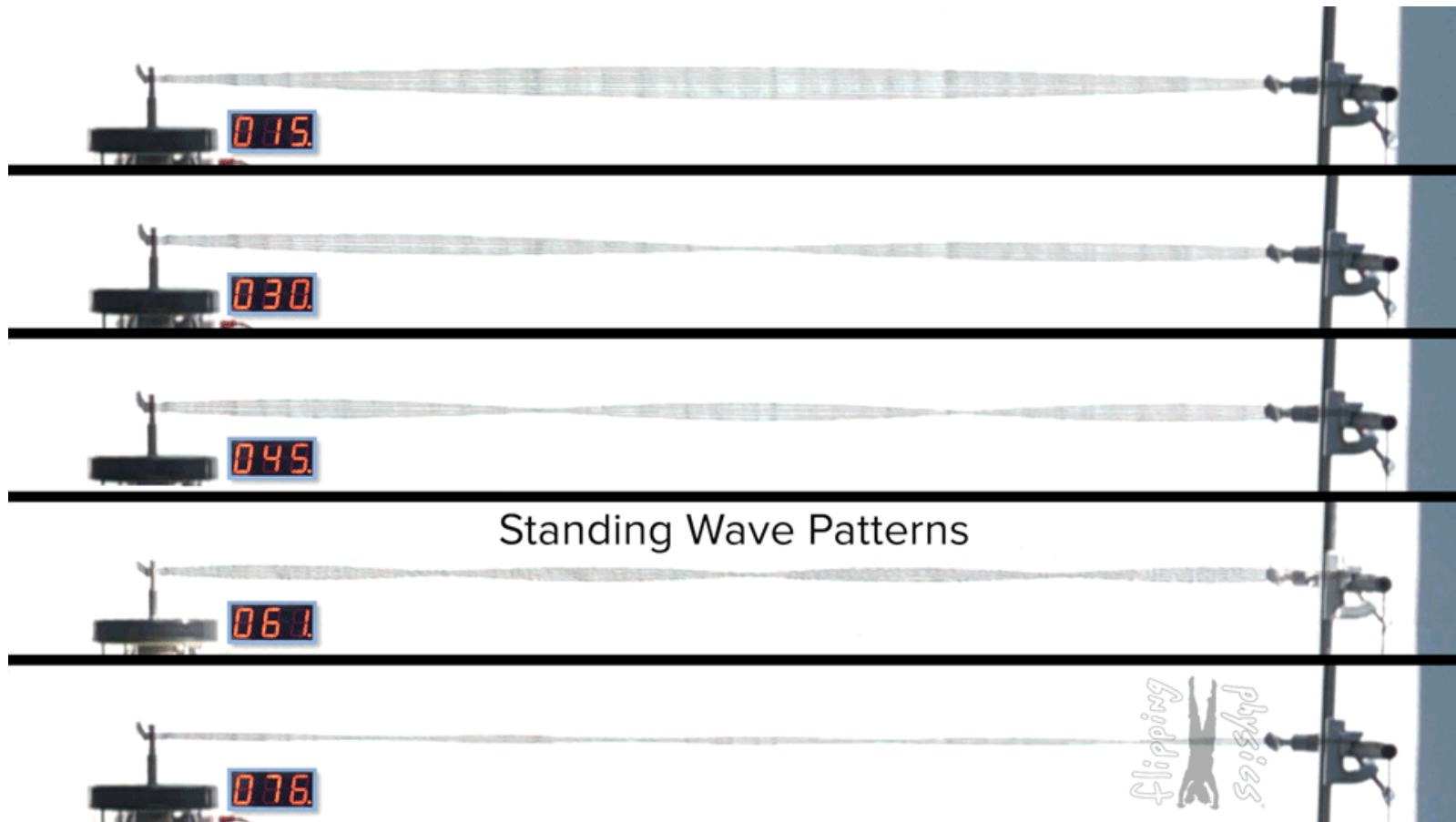
Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες
 - Κανονικές μορφές (modes) n



Στάσιμα Κύματα

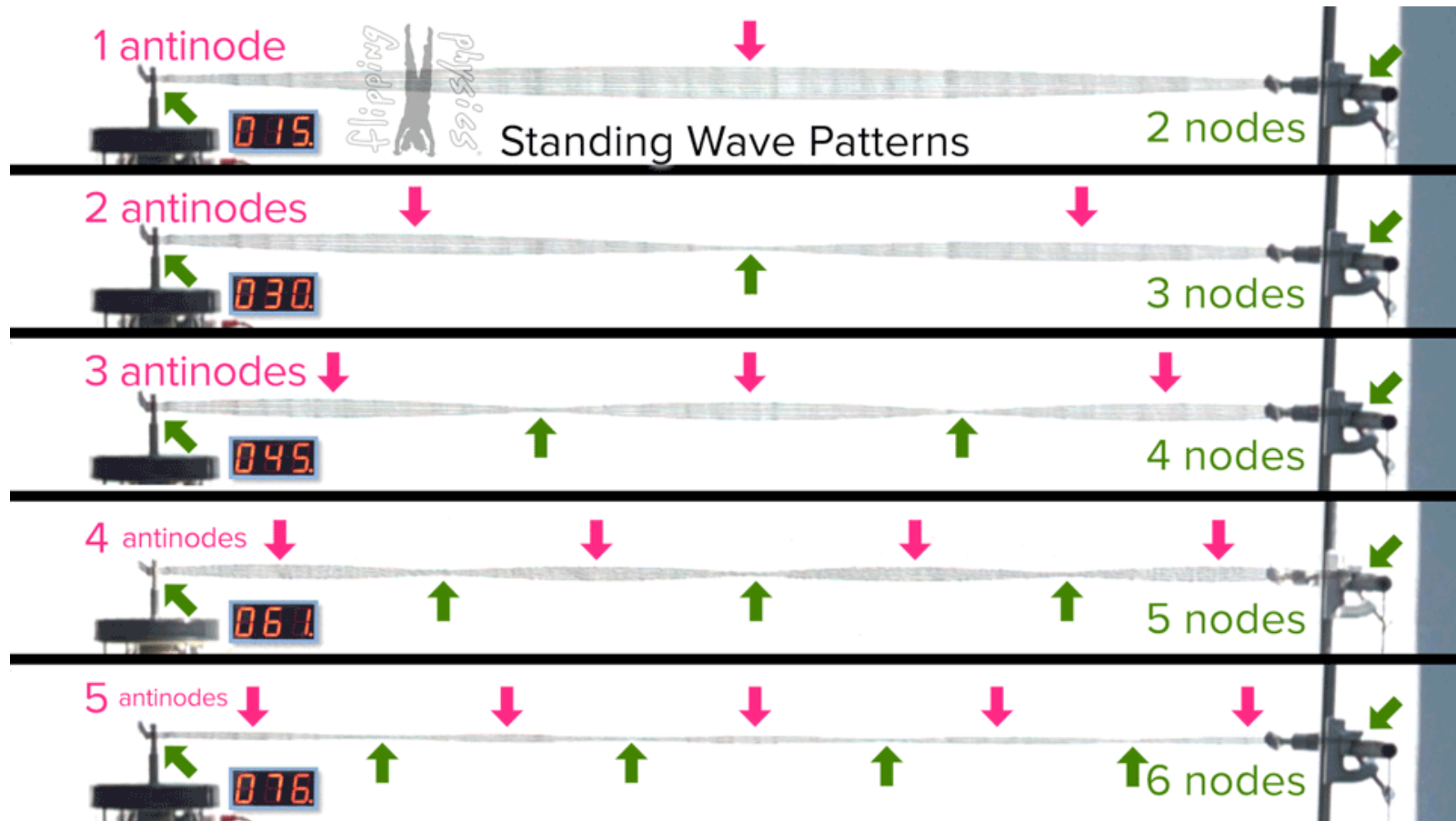
- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες
 - Κανονικές μορφές (modes) n



Στάσιμα Κύματα

Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Κανονικές μορφές (modes) n





Τέλος Διάλεξης

